Analysis Zusammenfassung 2009 [1]

Revision 81

Stefan Heule
Contributors: Raphael Fuchs, Andrea Helfenstein, Steven Koeppel

15. Oktober 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **1**
1.1 Funktionen . . . 1
1.2 Nützliche Ungleichungen . . . 1
1.3 Komplexe Zahlen . . . 1
1.4 Koordinatensysteme . . . 1

3 Folgen und Reihen **2**
3.1 Rechenregeln für Grenzwerte . . . 2
3.2 Konvergenzkriterien für Folgen . . . 2
3.3 Häufungspunkte von Folgen . . . 2
3.4 Satz von Bolzano-Weierstrass . . . 3
3.5 Absolute Konvergenz . . . 3
3.6 Konvergenzkriterien für Reihen . . . 3
3.7 Wichtige Folgen, Reihen und Grenzwerte . . . 3

4 Stetigkeit **4**
4.1 Funktionen . . . 4
4.2 Stetige Funktionen . . . 4
4.3 Topologie . . . 5
4.4 Äquivalente Normen . . . 6
4.5 Topologische Kriterien für Stetigkeit . . . 6
4.6 Zwischenwertsatz und Folgerungen . . . 6
4.7 Gleichmässige Konvergenz . . . 6

5 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ **7**
5.1 Grundlagen . . . 7
5.2 Mittelwertsatz und Folgerungen . . . 7
5.3 Kurvendiskussion . . . 8
5.4 Konvexe Funktionen . . . 8
5.5 Differentialgleichungen . . . 9
5.6 Differentialgleichung 2 . . . 10
5.7 Fortsetzung der Lösung . . . 10

6 Integration in $\mathbb{R}$ **10**
6.1 Grundlagen . . . 10

7 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ **11**
7.1 Definition . . . 11
7.2 Differentationsregeln . . . 11
7.3 Wegintegrale . . . 12
7.4 Taylorformel im $\mathbb{R}^n$ . . . 12
7.5 Extremstellen im $\mathbb{R}^n$ . . . 13
7.6 Vektorwertige Funktionen . . . 13
7.7 Umkehrsatz . . . 14
7.8 Implizite Funktionen . . . 14
7.9 Extremwerte mit Nebenbedingungen . . . 14

8 Integration im $\mathbb{R}^n$ **14**
8.1 Grundlagen . . . 14
8.2 Substitutionsregel . . . 15
8.3 Oberflächenmass und Flussintegral . . . 15
8.4 Der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$ . . . 16
8.5 Der Satz von Gauss . . . 16

A Appendix **17**
A.1 Trigonometrie . . . 17
A.2 Verschiedenes . . . 17
A.3 Integral- und Differentialrechnung . . . 18
A.4 Ansätze für partikuläre Lösung . . . 18

B Verschiedene Tipps **19**
B.1 Bijektivität einer Funktion zeigen . . . 19
B.2 Grenzwert einer Folge bestimmen . . . 19
B.3 Konvergenz einer Reihe untersuchen . . . 19
B.4 Standardsubstitutionen . . . 19

1 Grundlagen

1.1 Funktionen

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

i. f heisst surjektiv, falls jedes $y \in Y$ mindestens ein Urbild hat.

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X : y = f(x)$$

ii. f heisst injektiv, falls jedes $y \in Y$ höchstens ein Urbild hat.

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

iii. f heisst bijektiv, falls jedes $y \in Y$ genau ein Urbild hat.

$$\forall y \in Y\ \exists! x \in X : y = f(x)$$

1.2 Nützliche Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\text{Dreiecksungleichung:} \quad & \forall x, y \in \mathbb{C} : |x + y| \leq |x| + |y| \\
\text{Youngsche Ungleichung:} \quad & \forall x, y \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 : 2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \tfrac{1}{\varepsilon} y^2 \\
\text{Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:} \quad & \forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x \cdot y| \leq ||x||\ ||y|| \\
\text{Bernoullische Ungleichung:} \quad & (1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{für reelles } x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

1.3 Komplexe Zahlen

$$\begin{aligned}
\text{Normalform} \quad & z = x + iy \\
\text{Polarform} \quad & x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\text{arg} \quad & \varphi = \arg(z) = \begin{cases} +\arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y < 0 \\ \text{undef} & \text{falls } x = y = 0 \end{cases} \\
\text{Euler'sche Form} \quad & z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \\
& i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad 1 = -e^{i\pi} = e^0 \quad -1 = e^{i\pi} \\
\text{Realteil} \quad & \mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + \overline{z}}{2} \\
\text{Imaginärteil} \quad & \mathrm{Im}(z) = y = \frac{z - \overline{z}}{2i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Addition} \quad & z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \\
\text{Multiplikation} \quad & z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\
& z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\
\text{Potenz} \quad & z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi} \\
\text{Betrag} \quad & |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = r \\
\text{Wurzel} \quad & \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right)} \qquad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n-1 \\
\text{Argument} \quad & \arg(z) = \varphi \mod 2\pi \\
& \arg(z_1 \cdot z_2) = (\arg z_1 + \arg z_2) \mod 2\pi \\
& \arg\tfrac{z_1}{z_2} = (\arg z_1 - \arg z_2) \mod 2\pi
\end{aligned}$$

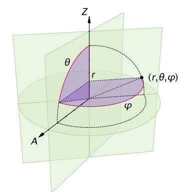
1.4 Koordinatensysteme

1.4.1 Polarkoordinaten (r, φ)

$$\begin{aligned}
& x = r\cos\varphi && r = \sqrt{x^2 + y^2} && 0 \leq r < \infty \\
& y = r\sin\varphi && \varphi = \arg(x, y) && 0 \leq \varphi < 2\pi \\
& \det(\mathrm{d}\Phi(r, \varphi)) = r
\end{aligned}$$

1.4.2 Kugelkoordinaten, übliche Konvention (r, θ, φ)

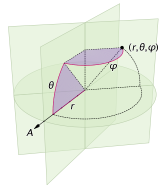
$$\begin{aligned}
& x = r\sin\theta\cos\varphi && r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} && 0 \leq r < \infty \\
& y = r\sin\theta\sin\varphi && \varphi = \arg(x, y) && 0 \leq \varphi < 2\pi \\
& z = r\cos\theta && \theta = \arccos\left(\tfrac{z}{r}\right) && 0 \leq \theta \leq \pi
\end{aligned}$$



$$\det(\mathrm{d}\Phi(r, \theta, \varphi)) = r^2 \sin(\theta) = -\det(\mathrm{d}\Phi(r, \varphi, \theta))$$

$$\begin{aligned}
\Phi_\theta \times \Phi_\varphi &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta)^T \times (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0)^T \\
&= (r^2\sin^2\theta\cos\varphi, r^2\sin^2\theta\sin\varphi, r^2\cos\theta\sin\varphi)^T
\end{aligned}$$

1.4.3 Kugelkoordinaten, alternative Konvention (Unterricht) (r, φ, θ)

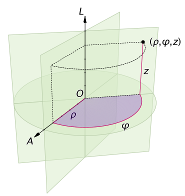


$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\cos\varphi & r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} & 0 &\le r < \infty \\
y &= r\cos\theta\sin\varphi & \varphi &= \arg(x,y) & 0 &\le \varphi < 2\pi \\
z &= r\sin\theta & \theta &= \arcsin\left(\tfrac{z}{r}\right) & -\tfrac{\pi}{2} &\le \theta \le \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$\det(\mathrm{d}\Phi(r,\varphi,\theta)) = r^2\cos(\theta)$

$$\begin{aligned}
\Phi_\varphi \times \Phi_\theta &= (-r\cos\theta\sin\varphi, r\cos\theta\cos\varphi, 0)^T \times (-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)^T \\
&= (r^2\cos^2\theta\cos\varphi, r^2\cos^2\theta\sin\varphi, r^2\sin\theta\cos\theta)^T
\end{aligned}$$

1.4.4 Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

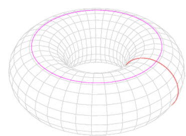


$$\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi & \rho &= \sqrt{x^2+y^2} & 0 &\le \rho < \infty \\
y &= \rho\sin\varphi & \varphi &= \arg(x,y) & 0 &\le \varphi < 2\pi \\
z &= z & z &= z & -\infty &< z < \infty
\end{aligned}$$

$\det(\mathrm{d}\Phi(\rho,\varphi,z)) = \rho$

$\Phi_\varphi \times \Phi_z = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)^T \times (0,0,1)^T = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)^T$

1.4.5 Toruskoordinaten (φ, ψ)



$$\begin{aligned}
x &= (R + r\cos\psi)\cos\varphi & y &= (R + r\cos\psi)\sin\varphi \\
z &= r\sin\psi & \det(\mathrm{d}\Phi(\varphi,\psi)) &= r\cdot(R + r\cos\psi)
\end{aligned}$$

1.4.6 Argument

$$\underset{\in[0,2\pi)}{arg(x,y)} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \text{ und } y \ge 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & x > 0 \text{ und } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y < 0 \\ 0 & x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\in(-\pi,\pi]}{arg(x,y)} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \text{ und } y \ge 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0 \text{ und } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y < 0 \\ 0 & x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

3 Folgen und Reihen

3.1 Rechenregeln für Grenzwerte

Seien die die Folgen $a_n, b_n \subset \mathbb{R}$ konvergent gegen a bzw. b. Dann gelten folgende Regeln:

i. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

iii. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b$ falls $b \neq 0 \neq b_n$

iv. Falls $a_n \le b_n \implies a \le b$

v. f ist stetig $\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = f(a)$

3.2 Konvergenzkriterien für Folgen

3.2.1 Monotone Konvergenz

Sei a_n eine nach oben (unten) beschränkte Folge und monoton wachsend (fallend). Dann konvergiert a_n mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

3.2.2 Cauchy-Kriterium

Eine Folge a_n heist Cauchy-Folge falls

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, l \ge n_0 :\ |a_n - a_l| < \varepsilon$$

Im $\mathbb{R}^n$ sind alle Cauchy-Folgen konvergent und umgekehrt!

3.3 Häufungspunkte von Folgen

$a \in \mathbb{R}$ heisst Häufungspunkt der Folge a_n, falls a_n eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt, d.h

$$a = \lim_{\substack{l\to\infty \\ l\in\Lambda}} a_l$$

Der Limes Superior bzw. Limes Inferior bezeichnen den grössten bzw. kleinsten Häufungspunkt einer Folge a_n

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} a_k\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

3.4 Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge a_n - d.h eine für die gilt $\exists M\ \forall n : |a_n| < M$ - besitzt eine konvergente Teilfolge bzw. einen Häufungspunkt.

3.5 Absolute Konvergenz

Die Reihe $\sum a_k$ **konvergiert absolut** falls $\sum |a_k|$ konvergiert. Die Partialsummen von solchen Reihen wachsen monoton und die **Summationsreihenfolge** darf hier vertauscht werden.

3.6 Konvergenzkriterien für Reihen

3.6.1 Notwendige Bedingung für Konvergenz

$a_n \to 0$ ist notwendig für die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

3.6.2 Cauchy-Kriterium

$$\left|\sum_{k=l}^{n} a_k\right| \to 0 \qquad (n \geq l,\ l \to \infty)$$

3.6.3 Quotientenkriterium (Kriterium für absolute Konvergenz)

- $q_{sup} = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert
- $q_{inf} = \liminf_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert
- $q_{inf} \leq 1 \leq q_{sup} \implies$ keine Aussage

3.6.4 Wurzelkriterium (Kriterium für absolute Konvergenz)

- $q = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert
- $q > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert, $q = 1 \implies$ keine Aussage

3.6.5 Majoranten-/Minorantenkriterium (Kriterium für absolute Konvergenz)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe und $|a_i| \leq |b_i|$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ebenfalls. Umgekehrt gilt für eine divergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $|a_i| \geq |b_i|$ dass auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert.

3.6.6 Integralkriterium

Sei $f : [p, \infty[\to \mathbb{R}_+$ mit $p \in \mathbb{Z}$ monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn $\int_p^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, und in diesem Fall gilt

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

3.7 Wichtige Folgen, Reihen und Grenzwerte

- **geometrische Reihe**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \text{für } |q| < 1 : \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

- **Potenzreihe** in z mit Zentrum c und Koeffizientenfolge a_n

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

konvergiert innerhalb des Konvergenzradius ρ

$$|z-c| < \rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

und divergiert ausserhalb, d.h $|z-c| > \rho$. Die Ableitung $f'(x)$ hat denselben Konvergenzradius wie $f(x)$ und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}$$

Weiter dürfen Potenzreihen im Innern ihres Konvergenzradius gliedweise integriert werden.

- **harmonische Reihe** (divergent): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$
- **alternierende harmonische Reihe** (konvergent) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
- **Zeta-Funktion** (konvergent für $s > 1$): $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \qquad (s > 0)$
- **spezielle Taylorreihen**

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} && = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} && = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} && \text{für } -1 < x \leq 1
\end{aligned}
$$

- **Wichtige Grenzwerte**

$$
\begin{array}{lll}
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 & \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \\
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 & \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 & \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}
\end{array}
$$

$$\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0 \qquad p \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < q < 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \alpha > 0$$

4 Stetigkeit

4.1 Funktionen

4.1.1 Abschluss

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Der Abschluss $\overline{\Omega}$ von Ω ist

$$\overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^d ; \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega : x_k \to x \ (k \to \infty)\}$$

4.1.2 Grenzwert einer Funktion

f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert a, falls für alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega$ mit $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$ gilt $f(x_k) \to a$ $(k \to \infty)$. Notation

$$a = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\Omega}} f(x)$$

4.1.3 Stetigkeit und stetig ergänzbar

i. f ist stetig an der Stelle $x_0 \in \Omega$, falls folgender Grenzwert exisitert

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ii. f ist an der Stelle $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ stetig ergänzbar falls folgender Grenzwert existiert

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\Omega}} f(x)$$

4.1.4 Lipschitz-Stetigkeit

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heisst Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$ falls gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung Für $\mathbb{R}$ ist $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$

4.1.5 Lokal Lipschitz-stetig

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heisst lokal Lipschitz-stetig auf Ω, falls zu jedem $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $\mathcal{U} = B_r(x_0) \cap \Omega$ exisitert, so dass die auf $\mathcal{U}$ eingeschränkte Funktion $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $f|_{\mathcal{U}}(x) = f(x)$ Lipschitz-stetig ist.

4.1.6 Stetitgkeitskriterium

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig auf Ω. Dann ist f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ stetig.

4.2 Stetige Funktionen

4.2.1 Komposition und Addition von stetigen Funktionen

Seien $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann sind $f + g$, αf und $h \circ f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$ stetig.

4.2.2 Kompaktheit

$K \in \mathbb{R}^d$ heisst kompakt, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ einen Häufungspunkt in K besitzt, d.h. falls eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $x_0 \in K$ existieren mit

$$x_k \to x_0 \ (k \to \infty, k \in \Lambda)$$

Beispiele $[0,1]$ ist kompakt, $[0,1)$ und $\mathbb{R}$ aber nicht

4.2.3 Infimum und Supremum von kompakten Mengen

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist K beschränkt und es gibt $a, b \in K$ mit

$$a = \sup K = \max K \qquad \text{und} \qquad b = \inf K = \min K$$

Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ wieder kompakt und sei $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist $f(K) = \{f(x); x \in K\}$ kompakt. Insbesondere nehmen stetige Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$ auf kompakten Intervallen ihr Supremum und Infimum immer an.

4.3 Topologie

4.3.1 Offener Ball

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Der offene Ball vom Radius $r > 0$ um x_0 ist

$$B_r(x_0) = \{x; \|x - x_0\| < r\}$$

4.3.2 Innerer Punkt, offene Mengen

i. $x_0 \in \Omega$ heisst innerer Punkt von Ω, falls $r > 0$ exisitert mit $B_r(x_0) \subset \Omega$.

ii. Ω heisst offen, falls jedes $x_0 \in \Omega$ ein innerer Punkt von Ω ist.

Beispiele $B_r(a)$, $]a,b[$, $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind offen, $[a,b[$ aber nicht.

4.3.3 Abgeschlossene Mengen

$A \subset \mathbb{R}^d$ heisst abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^d \setminus A$ offen ist.

Beispiele $[a,b]$, $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, $[a,b[$ aber nicht.

4.3.4 Regeln für offene und abgeschlossene Mengen

Für zwei offene Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ gilt

i. Der Durchschnitt $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ist offen. Für unendlich viele Mengen gilt dies im Allgemeinen aber nicht.

ii. Die Vereinigung $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ist offen. Dies gilt auch für beliebig viele Mengen

Für zwei abgeschlossene Mengen $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^d$ gilt

i. Der Durchschnitt $A_1 \cap A_2$ ist abgeschlossen. Dies gilt auch für beliebig viele Mengen

ii. Die Vereinigung $A_1 \cup A_2$ ist abgeschlossen. Für unendlich viele Mengen gilt dies im Allgemeinen aber nicht.

4.3.5 Inneres, Abschluss und Rand einer Menge

i. Die Menge der inneren Punkte von Ω heisst das Innere von Ω.

$$\operatorname{int}\Omega = \bigcup_{U \subset \Omega, U \text{ offen}} U = \mathring{\Omega}$$

$\mathring{\Omega}$ ist offen. $\mathring{\Omega}$ ist gar die grösste in Ω enthaltene, offene Menge.

ii. Der Abschluss von Ω ist

$$\operatorname{clos}\Omega = \bigcap_{\Omega \subset A, A \text{ abg.}} A = \overline{\Omega}$$

$\overline{\Omega}$ ist abgeschlossen. $\overline{\Omega}$ ist gar die kleinste abgeschlossene Menge, die Ω enthält.

iii. Der Rand von Ω ist

$$\partial\Omega = \operatorname{clos}\Omega \setminus \operatorname{int}\Omega = \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}$$

Der Rand ist abgeschlossen. Eine andere Definition für den Rand lautet

$$\partial\Omega = \{x_0 \in \mathbb{R}^d; \forall r > 0 : B_r(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset \neq B_r(x_0) \setminus \Omega\}$$

4.3.6 Folgenkriterium für Abgeschlossenheit

Für $A \subset \mathbb{R}^d$ sind äquivalent

i. A ist abgeschlossen, $A = \overline{A}$

ii. $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A : x_k \to x_0 \ (k \to \infty) \implies x_0 \in A$

4.3.7 Folgenkriterium für Kompaktheit

Für $K \subset \mathbb{R}^d$ sind äquivalent

i. K ist kompakt (Folgen-kompakt)

ii. K ist beschränkt und abgeschlossen

4.4 Äquivalente Normen

4.4.1 Norm

Eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbilung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

i. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

4.4.2 p-Norm

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist die p-Norm definiert als

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

4.4.3 C^m-Norm

Sei Ω beschränkt und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar und m mal diffbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{C_m(\overline{\Omega})} &:= \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sup_{x \in \Omega} |f'(x)| + \ldots + \sup_{x \in \Omega} |f^{(m)}(x)| < \infty \\ &= \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0} + \ldots + \|f^{(m)}\|_{C^0} \end{aligned}$$

4.4.4 Äquivalenz von Normen

Zwei Normen $\|\cdot\|^{(1)}$ und $\|\cdot\|^{(2)}$ sind äquivalent, falls ein $C > 0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{C}\|\cdot\|^{(1)} \leq \|\cdot\|^{(2)} \leq C\|\cdot\|^{(1)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Je zwei Normen $\|\cdot\|^{(1)}$ und $\|\cdot\|^{(2)}$ auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent.

4.5 Topologische Kriterien für Stetigkeit

4.5.1 Umgebung

i. $\mathcal{U} \subset \Omega$ heisst **Umgebung** von x_0 relativ zu Ω falls $r > 0$ existiert mit

$$B_r(x_0) \cap \Omega \subset \mathcal{U}$$

ii. $\mathcal{U} \subset \Omega$ heisst **relativ offen** (bezüglich Ω) falls $\mathcal{U}$ Umgebung jedes Punktes $x_0 \in \mathcal{U}$ ist; d.h. falls eine offene Menge $E \subset \mathbb{R}^d$ exisitert mit $\mathcal{U} = E \cap \Omega$.

iii. $\mathcal{A} \subset \Omega$ heisst **relativ abgeschlossen** (bezüglich Ω), falls $\Omega \setminus \mathcal{A}$ relativ offen ist; d.h. falls eine abgeschlossene Menge $F \subset \mathbb{R}^d$ existiert mit $\mathcal{A} = F \cap \Omega$.

4.5.2 Weierstraß'sches ε-δ-Kriterium

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \Omega$. Es sind äquivalent

i. f ist stetig an der Stelle x_0

ii. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \Omega : \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

iii. Für jede Umgebung V von $f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 in Ω.

4.6 Zwischenwertsatz und Folgerungen

4.6.1 Zwischenwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

4.6.2 Streng monoton wachsende Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig mit $c = f(a)$ und $d = f(b)$. Dann ist die Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ bijektiv und die Umkehrabbildung stetig.

4.7 Gleichmässige Konvergenz

4.7.1 Gleichmässig stetig

f heisst auf Ω gleichmässig stetig, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in \Omega : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung 1 Falls f Lipschitz-stetig ist, so ist f gleichmässig stetig.

Bemerkung 2 Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gleichmässig stetig, so ist f auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar.

Bemerkung 3 Sei $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig und kompakt. Dann ist f gleichmässig stetig.

4.7.2 Punktweise und gleichmässige Konvergenz

i. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert **punktweise** gegen f, falls für alle $x \in \Omega$ gilt

$$f_k(x) \to f(x) \quad (k \to \infty) \qquad \text{oder äquivalent}$$

$$\forall x\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(x,\varepsilon)\ \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ii. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert **gleichmässig** gegen f ($f_k \xrightarrow{\text{glchm.}} f$), falls

$$\sup_{x\in\Omega} |f_k(x) - f(x)| \to 0 \quad (k \to \infty) \qquad \text{oder äquivalent}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall x\ \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

4.7.3 Konvergenz bei Cauchy-Folgen

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $C^0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ mit $\|f_k - f_l\|_{C^0} \to 0$ $(k,l \to \infty)$. Dann gibt es ein $f \in C^0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \xrightarrow{\text{glchm.}} f$.

5 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

5.1 Grundlagen

5.1.1 Differenzierbarkeit

f heisst differenzierbar an der Stelle x_0 falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

existiert. In diesem Fall heisst $f'(x_0)$ die Ableitung oder das Differential von f an der Stelle x_0.

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 diffbar, so ist f in diesem Punkt auch stetig. Die Umkehrung gilt aber im Allgemeinen nicht.

5.1.2 Funktionen der Klasse C^m

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst von der Klasse $C^1(\Omega)$ wenn die Funktion $x \mapsto f'(x)$ stetig ist. Die Funktion f heisst weiter von der Klasse $C^m(\Omega)$, falls f m-mal differenzierbar ist und die Ableitungsfunktionen $f = f^{(0)}, f' = f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ stetig sind.

5.1.3 Summen-, Produkte- und Quotientenregel

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_o \in \Omega$ diffbar. Dann sind $f + g$, fg und, falls $g(x_0) \neq 0$, auch ${}^f/_g$ an der Stelle x_o diffbar, und es gilt

i. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

iii. $({}^f/_g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

5.1.4 Kettenregel

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar, und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$. Dann ist die Funktion $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 diffbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

5.1.5 Tangente

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar. Dann ist die Tangente im Punkt x_0

$$t(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

5.2 Mittelwertsatz und Folgerungen

5.2.1 Mittelwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie in $]a, b[$ diffbar. Dann gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Daraus folgt direkt: Falls $f' \geq 0$ $(f' > 0)$ $\forall x \in]a, b[$, so ist f (streng) monoton wachsend.

5.2.2 Regel von de l'Hôpital

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ diffbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$. Weiter gelte $f(a) = 0 = g(a)$, oder beide Funktionen divergieren bestimmt für $x \searrow a$ und es exisitere der Grenzwert

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: A$$

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x > a$, und es gilt

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

5.2.3 Umkehrsatz

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ diffbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a,b[$. Setze

$$-\infty \leq c := \inf_{a<x<b} f(x) < \sup_{a<x<b} f(x) =: d \leq \infty$$

Dann ist $f :]a,b[\to]c,d[$ bijektiv und $f^{-1} :]c,d[\to \mathbb{R}$ ist diffbar mit

$$\left(f^{-1}\right)' |_{y=f(x_0)} = \frac{1}{f(x_0)}$$

oder äquivalent

$$\left(f^{-1}\right)' (y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

5.2.4 Nullstellen

i. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und besitzt zwei Nullstellen $x_1 < x_2$. Dann gibt es mindestens eine lokale Extremalstelle $x_0 \in]x_1, x_2[$.

ii. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar und f' habe genau n Nullstellen. Dann hat die Funktion f höchstens $n+1$ Nullstellen.

5.2.5 Taylor-Formel

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung der Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$

$$T_m f(x;a) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(m)}(a)\frac{(x-a)^m}{m!}$$

hat die Approximationseigenschaft

$$r_m f(x;a) = f(x) - T_m f(x;a) = f^{(m+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} \qquad \text{für ein } \xi \in]a,x[$$

5.3 Kurvendiskussion

5.3.1 Kriterien

	notwendig	hinreichend
Extremalstelle	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
Minimalstelle	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
Maximalstelle	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Wendepunkt	$f''(x) = 0$	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
Sattelpunkt	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

5.3.2 Höhere Ableitungen

Sei $f \in C^m(\Omega)$, $m \geq 1$ und sei $x_0 \in \Omega$ mit $f'(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$.

- Falls $m = 2k+1$ und x_0 lokale Minimalstelle ist, so folgt $f^{(m)}(x_0) = 0$
- Falls $m = 2k$ und $f^{(m)}(x_0) > 0$, so ist x_0 strikte lokale Minimalstelle.

5.4 Konvexe Funktionen

5.4.1 Definition konvexe Funktion

Sei $f \in C^2(]a,b[)$ mit $f'' \geq 0$. Dann heisst f konvex und es gilt für alle $x_0, x_1 \in]a,b[$ und $0 \leq t \leq 1$

$$f\left(tx_1 + (1-t)x_0\right) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_0)$$

5.4.2 Satz von Jensen

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für $x_1, \ldots, x_N \in]a,b[$, $0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_N \leq 1$ mit $\sum \alpha_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(x_i)$$

5.5 Differentialgleichungen

5.5.1 Systeme von DGL's

Um ein System von n homogenen DGL's erster Ordnung der Form $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ mit $x(0) = x_0$ zu lösen, kann die Transformationsmethode verwendet werden. Ist die Matrix A diagonalisierbar mit $A = V\Lambda V^{-1}$ gilt

$$x(t) = Ve^{t\Lambda}c \qquad \text{mit } Vc = x_0$$

Eine lineare, homogene DGL der Ordnung n von der Form

$$y^{(n)}(t) - \beta_n x^{(n-1)}(t) - \ldots - \beta_2 \dot{x}(t) - \beta_1(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = \alpha_1, \dot{y}(0) = \alpha_2, \ldots, x^{(n-1)}(0) = \alpha_n$$

lässt sich in ein Sytem von n Gleichungen 1. Ordnung transformieren:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{pmatrix} x(t), \quad \text{mit } x(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \text{Substitution:} \quad \begin{matrix} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{matrix}$$

5.5.2 Lineare DGL

Zum Lösen einer linearen DGL der Form

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 f(t) = b(t)$$

gehe wie folgt vor:

i. Löse die homogene DGL. Dazu werden die Nullstellen des charakteristischen Polynoms untersucht:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$$

(a) Einfache, reelle Nullstelle, $\lambda_i = a$

$$f_{part_i} = e^{at}$$

(b) m-fache, reelle Nullstelle, $\lambda_i = \ldots = \lambda_j = a$

$$f_{part_i} = e^{at}, \quad f_{part_{i+1}} = te^{at}, \quad \ldots \quad f_{part_j} = t^{m-1}e^{at}$$

(c) Nullstelle ist komplex, $\lambda_i = a + ib, \lambda_{i+1} = a - ib$

$$f_{part_i} = e^{at}\cos(bt), \quad f_{part_{i+1}} = e^{at}\sin(bt)$$

Die allgemeine Lösung ist dann eine Linearkombination der n partikulären Lösungen.

ii. Finde eine Lösung der inhomogenen DGL mit einem geeigneten Ansatz. Setzt sich die Inhomogenität aus k Summanden zusammen, so kann das Problem in k Teilprobleme aufgeteilt werden, da das Superpositionsprinzip bei linearen DGL's gilt. Weiter ist zu beachten, dass sich der Ansatz von allen Partikulärlösungen der homogenen Gleichung unterscheidet. Ist dies nicht der Fall, kann wie bei mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms vorgegangen werden.

Die allgemeine Lösung setzt sich dann aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen.

5.5.3 Separation der Variablen

Eine DGL der Form $y' = f(y) \cdot g(x)$ lässt sich mittels Separation der Variablen lösen.

i. Überprüfe, ob die DGL konstante Lösungen hat.

ii. Für alle y, die nicht einer der gefundenen konstanten Lösungen entspricht, forme die Gleichung um:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y) \cdot g(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = g(x)\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x$$

Diese Gleichung lässt sich nun nach y auflösen, wobei y die ursprüngliche DGL löst.

5.5.4 Variation der Konstanten

Inhomogene, lineare DGL's erster Ordnung, also von der Form $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + g(x)$ von denen man die vollständige Lösung y_{Hom} der homogenen Gleichung kennt, können mittels "Variation der Konstanten" gelöst werden:

i. Die Konstante der homogenen Lösung wird durch eine stetige, von x abhängige Funktion ersetzt: $y_{Ansatz} = c(x)y_{Hom}$

ii. Nun kann dieser Ansatz in die DGL eingesetzt werden:

$$y'(x) = \cancel{c(x) \cdot y'_{Hom}} + c'(x) \cdot y_{Hom} = \cancel{c(x) \cdot f(x)y(x)} + g(x)$$

iii. Der so entstehende Ausdruck kann nun mittels Integration nach $c(x)$ aufgelöst werden, womit die allgemeine Lösung $y(x) = c(x) \cdot y_{Hom}$ der inhomogenen Gleichung gefunden ist.

5.6 Differentialgleichung 2

5.6.1 Picard-Lindelöf

Sei $f = f(t,u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich $u \in \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, sowie lokal gleichmässig in $t \in R$. Dann gilt

- Zu jedem $u_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es $R = T(u_0) > 0$ und genau eine Lösung $u = u(t; u_0) \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^n)$ des Anfangwertproblems

$$\dot{u}(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, u(t)), \quad 0 \le t \le T \qquad \text{mit } u(0) = u_0$$

- Die Lösung $u = u(t; u_0)$ hängt stetig ab von u_0 im folgenden Sinn: Zu jedem $u_0 \in \mathbb{R}^n$ existieren $r > 0, T > 0, C \in \mathbb{R}$ so, dass für $u_1 \in B_r(u_0)$ die Lösung $u(t; u_1) \in C^1([0,T])$ des AWP mit $u(0, u_1) = u_1$ existieren und

$$\|u(t, u_0) - u(t, u_1)\|_{C^1([0,T])} \le C|u_1 - u_0|$$

5.6.2 Vorbereitung Banachscher Fixpunktsatz

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum.

- $M \subset X$ heisst abgeschlossen, falls gilt:

$$\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M : x_k \to x \implies x \in M$$

- $\Phi : M \to M$ heisst kontrahierend, falls $q < 1$ existiert mit

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_X \le q\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in M$$

Bemerkung 1 Um für eine Abbildung Φ zu zeigen, dass diese kontrahierend ist, kann der Mittelwertsatz verwendet werden.

Bemerkung 2 R^n ist ein Banachraum.

5.6.3 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $M \subset X$ abgeschlossen und $\Phi : M \to M$ kontrahierend. Dann gibt es genau ein $\overline{x} \in M$ mit $\Phi(\overline{x}) = \overline{x}$. Weiter gilt für jedes $x_0 \in M$ und die Folge

$$x_k = \Phi(x_{k-1}) = \ldots = \Phi^k(x_0) \quad k \in \mathbb{N}$$

Konvergenz $x_k \to \overline{x}$ $(k \to \infty)$ und

$$\|x_k - \overline{x}\|_X \le q^k \|x_0 - \overline{x}\|_X$$

5.7 Fortsetzung der Lösung

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wie bei Picard-Lindelöf und sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein maximales $T_{max} > 0$ so dass die Lösung $u = u(t, u_0)$ von Picard-Lindelöf zu einer Lösung u_{max} des Anfangwertproblems fortgesetzt werden kann auf $[0, T_{max}[$ und entweder $T_{max} = \infty$ oder $|u(t)| \to \infty$ $(t \nearrow T_{max})$.

6 Integration in $\mathbb{R}$

6.1 Grundlagen

6.1.1 Haupsatz der Infinitesimalrechnung

Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann ist die Funktion

$$F : \quad x \to \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in [a,b]$$

auf $[a,b]$ stetig differenzierbar mit $F' = f$.

6.1.2 Eigenschaften des Integrals

Seien $f, g \in C^0(]a,b[)$ mit Stammfunktionen $F, G \in C^1(]a,b[)$, dann gelten folgende Eigenschaften des Integrals

$$\text{Linearität:} \quad \int (\alpha f(x) + \beta g(x))\ \mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{Monotonie:} \quad f \le g \implies \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit } a < x_0 < x_1 < b$$

$$\text{Additivität:} \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit } a < x_0 \le x_1 \le x_2 < b$$

$$\text{Abschätzung:} \quad \left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{C^0}(b-a) = \int_a^b \|f\|_{C^0}\,\mathrm{d}x$$

6.1.3 Hauptsatz

Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann ist die Funktion

$$F : x \to \int_a^x f \, \mathrm{d}t, \; x \in [a,b]$$

auf $[a,b]$ stetig differenzierbar mit $F' = f$

6.1.4 Partielle Integration

Seien $f, g \in C^0(]a,b[)$, dann gilt

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x$$

6.1.5 Substitutionsregel

Seien $f, g \in C^1(]a,b[)$. Dann gilt

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f'(g(x)) \, g'(x) \, \mathrm{d}x = (f \circ g)\big|_{x=x_0}^{x_1} = f(g(x_1)) - f(g(x_0)) = \int\limits_{g(x_0)}^{g(x_1)} f'(z) \, \mathrm{d}z$$

6.1.6 Partialbruchzerlegung (Vorgehen)

i. Kürze Bruch der rationalen Funktion mittels Polynomdivision, falls Zählergrad > Nennergrad

ii. Nullstellen (inkl. komplexe) des Nenners und deren Vielfachheit bestimmen

iii. Zum Ansatz werden jeweils abhängig von der Art der Nullstellen folgende Summanden hinzugefügt:

   (a) einfache Nullstelle x_i : $\dfrac{a_{i1}}{x - x_i}$

   (b) j-fache Nullstelle x_i : $\dfrac{a_{i1}}{x - x_i} + \cdots + \dfrac{a_{ij}}{(x - x_i)^j}$

   (c) komplexe Nullstellenpaare: $\dfrac{b_i x + c_i}{x^2 + p_i x + q_i}$ mit $x^2 + p_i x + q_i = (x - z_i)(x - \overline{z_i})$ wobei das Nennerpolynom die beiden Nullstellen $z_i, \overline{z_i}$ hat.

iv. Den Ansatz mit der gekürzten Ausgangsfunktion gleichsetzen. Durch Koeffizientenvergleich entsteht ein lineares Gleichungssystem für die Konstanten der Zerlegung.

7 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

7.1 Definition

7.1.1 Klasse C^m

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst von der Klasse C^1, $f \in C^1(\Omega)$, falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ in jede Richtung e_i partiell differenzierbar ist und falls jede partielle Ableitung stetig ist. Die Funktion f heisst weiter von der Klasse C^m, falls $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^{m-1}(\Omega)_{1 \leq i \leq n}$.

7.1.2 Differenzierbarkeit, Differenzial

Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

In diesem Fall heisst $\mathrm{d}f(x_0) = A$ das Differential von f an der Stelle x_0.

7.1.3 Richtungsableitung

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $|a| = 1$. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richung a gegeben (falls existent) als

$$D_a f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot a) - f(x_0)}{h} = \varphi_a'(0) \qquad \text{mit} \quad \varphi_a(t) = f(x_0 + t \cdot a)$$

Ist f diffbar, so gilt weiter

$$D_a f(x) := \mathrm{d}f(x_0) \, a = \langle \nabla f, a \rangle$$

7.2 Differentationsregeln

7.2.1 Summen-, Produkt- und Quotientenregel

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_o \in \Omega$ diffbar. Dann sind $f + g$, fg und, falls $g(x_0) \neq 0$, auch ${}^f/_g$ an der Stelle x_o diffbar, und es gilt

i. $\mathrm{d}(f + g)(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) + \mathrm{d}g(x_0)$

ii. $\mathrm{d}(fg)(x_0) = g(x_0)\mathrm{d}f(x_0) + f(x_0)\mathrm{d}g(x_0)$

iii. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0) = \dfrac{g(x_0)\mathrm{d}f(x_0) - f(x_0)\mathrm{d}g(x_0)}{g^2(x_0)}$

7.2.2 Kettenregel, Teil 1

Sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_o \in \Omega$ diffbar und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(x_0)$ diffbar. Dann ist die Funktion $f \circ g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 diffbar und es gilt

$$\mathrm{d}\left(f \circ g\right)(x_o) = f'\left(g(x_0)\right)\mathrm{d}g(x_0)$$

7.2.3 Kettenregel, Teil 2

Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diffbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$, $g : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ diffbar an der Stelle t_0, wobei $g(t_0) = x_0$. Dann ist $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle t_0 diffbar, und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ g)(t_0) = \mathrm{d}f(g(t_0))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

oder dazu äquivalent

$$\mathrm{d}(f \circ g)(t_0) = \mathrm{d}f(g(t_0))\mathrm{d}g(t_0)$$

7.2.4 Integrale mit Parametern

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und partiell nach t diffbar mit stetiger Ableitungsfunktion. Betrachte

$$u(t) = \int_0^t h(s,t)\ \mathrm{d}s$$

Dann ist $u \in C^1(\mathbb{R})$ und für die Ableitung gilt

$$\dot{u}(t) = h(t,t) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\ \mathrm{d}s$$

7.3 Wegintegrale

7.3.1 Definition

Der Ausdruck

$$\int_\gamma \lambda := \int_0^1 \lambda(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\ \mathrm{d}t$$

heisst Wegintegral von λ längs γ. Analog lässt sich ein Wegintegral eines Vektorfeldes v definieren:

$$\int_\gamma v \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle\ \mathrm{d}t = \int_\gamma \lambda \qquad \text{mit } \lambda = v^T$$

7.3.2 Potenzialfunkion

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\lambda \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann sind äquivalent:

i. $\exists f \in C^1(\Omega) : \lambda = \mathrm{d}f \quad$ (Potenzial f)

ii. Für je zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1], \Omega)$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ gilt:

$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$$

iii. Für jedes $\gamma \in C^1_{pw}([0,1], \Omega)$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ (geschlossener Weg) gilt:

$$\int_\gamma \lambda = 0$$

Analog gilt für ein Vektorfeld die Äquivalenz von folgenden Aussagen:

i. v ist konservativ, d.h. Wegintegrale über geschlossenen Wegen verschwinden.

ii. $\exists f \in C^1(\Omega) : v = \nabla f \quad$ (f ist Potenzial, v ein Potenzialfeld)

7.3.2.1 Konservative Vektorfelder

Sei $v = (v^i)_{1 \le i \le n} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ konservativ. Dann gilt eine Verallgemeinerung der Bedingung $rot\ v = 0$:

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i}, \quad 1 \le i,j \le n$$

7.4 Taylorformel im $\mathbb{R}^n$

Sei $f \in C^m(\Omega)$ und $x_0, x_1 \in \Omega$ und $x_t \in \Omega$ für $0 \le t \le 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x_1) =& f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \cdot (x_1^i - x_0^i) \cdot (x_1^j - x_0^j) \\ &+ \ldots + \frac{1}{m!}\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha f(x_t) \cdot (x_1 - x_0)^\alpha \qquad \text{mit } x_t = (1-t)\cdot x_0 + t \cdot x_1 \end{aligned}$$

Weiter heisst

$$T_m f(x; x_0) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) \cdot (x - x_0) + \ldots + \frac{1}{m!}\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha$$

Taylorpolynom m-ter Ordnung um x_0

Bemerkung 1 (für $\mathbb{R}^2$) Für das Taylorpolynom 1./2. Ordnung am Punkt (x_0, y_0) gilt:

$$\begin{aligned} T_1 f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\ T_2 f(x,y) &= T_1 f(x,y) + \tfrac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + \tfrac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2 \\ &\quad + f_{xy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\cdot(x-x_0) \end{aligned}$$

Bemerkung 2 Die Tangentialebene an f im Punkt x_0 ist gegeben mit dem Taylorpolynom erster Ordnung in diesem Punkt. Beispiel: Tangentialebene an $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

7.4.1 Restterm

Um die Güte des Taylorpolynoms abzuschätzen wird der Restterm $r_m f$ der Ordnung m verwendet:

$$f(x_1) = T_m f(x_1; x_0) + r_m f$$

$$r_m f(x_1; x_0) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{|\alpha|=m+1} (\partial^\alpha f(x_\vartheta) - \partial^\alpha f(x_0))(x_1 - x_0)^\alpha$$

Bemerkung für $r_1 f$ Für $r_1 f(x,y)$ gilt für ein (x,y) zwischen (x_0,y_0) und (x_s,y_s):

$$r_1 f(x,y) = \tfrac{1}{2} f_{xx}(x_s,y_s)(x-x_0)^2 + \tfrac{1}{2} f_{yy}(x_s,y_s)(y-y_0)^2 + f_{xy}(x_s,y_s)(y-y_0)(x-x_0)$$

7.5 Extremstellen im $\mathbb{R}^n$

7.5.1 Kritischer Punkt und Hessematrix

$x_0 \in \Omega$ heisst kritischer Punkt von f falls $\mathrm{d}f(x_0) = 0$. Die Hessematrix einer Funktion f ist definiert als

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^2 : H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

7.5.2 Vorgehen

i. Bestimme alle kritischen Punkte von f.

ii. Berechne für jeden dieser Punkte die Hesse-Matrix $H_f(x)$ und untersuche ihre Definitheit:

   (a) H_f ist positiv definit, d.h. $x^T H_f x > 0 \quad \forall x \neq 0$. $\quad \to$ **Minimum**
   Ist die Matrix zusätzlich symmetrisch (wenn $f \in C^2(\Omega)$ ist das immer so), so sind in alle Eigenwerte grösser 0.

   (b) H_f ist negativ definit, d.h. $x^T H_f x < 0 \quad \forall x \neq 0$. $\quad \to$ **Maximum**
   Ist die Matrix zusätzlich symmetrisch, so sind in alle Eigenwerte kleiner 0.

   (c) H_f ist indefinit, d.h. $x^T H_f x$ ohne klares Vorzeichen. $\quad \to$ **Sattelpunkt**
   Ist die Matrix zusätzlich symmetrisch, so gibt es positive und negative Eigentwerte.

   (d) Falls $\det(H_f) = 0$, liegt eine **Entartung** vor. Keine Aussage möglich.

Bemerkung für $\mathbb{R}^2$ Da $\det(H_f) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, ist in $\mathbb{R}^2$ mit $\det(H_f)$ bereits ob bekannt ein Sattelpunkt vorliegt ($\det(H_f) < 0$). Andernfalls gibt der erste Eintrag, also $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, das Vorzeichen von λ_1 an.

7.6 Vektorwertige Funktionen

7.6.1 Differentiationsregeln von vektorwertigen Funktionen

Seien $f, g \in \Omega \to \mathbb{R}^l$ an der Stelle x_0 diffbar. Dann sind auch $f + g : \Omega \to \mathbb{R}^l$ und $f \cdot g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 diffbar und es gilt:

i. $\mathrm{d}(f+g)(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) + \mathrm{d}g(x_0)$

ii. $\mathrm{d}(f \cdot g)(x_0) = g(x_0)\cdot \mathrm{d}f(x_0) + f(x_0)\cdot \mathrm{d}g(x_0)$, $\qquad$ im Sinne von

$$\mathrm{d}(f\cdot g)(x_0)\cdot\xi = \overbrace{g(x_0)}^{\in\mathbb{R}^l}\cdot\overbrace{\mathrm{d}f(x_0)\cdot\xi}^{\in\mathbb{R}^l} + f(x_0)\cdot\mathrm{d}g(x_0)\cdot\xi \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

7.6.2 Kettenregel, Teil 3

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ und $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ diffbar. Dann ist $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle x_0 diffbar mit

$$\mathrm{d}(g\circ f)(x_0) = \overbrace{\mathrm{d}g(f(x_0))}^{\text{lin. Abb. } \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m} \cdot \overbrace{\mathrm{d}f(x_0)}^{\text{lin. Abb. } \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m}$$

7.7 Umkehrsatz

Sei $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ und $\mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar an einer Stelle $x_0 \in \Omega$. Dann gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von x_0 in Ω und eine Umgebung $\mathcal{V}$ von $y_0 = f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ und $g \in C^1(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)$ mit

$$g = \left(f\big|_{\mathcal{U}}\right)^{-1} \qquad g \text{ ist Inverse zu } f \text{ auf } \mathcal{U}$$

d.h.

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \mathcal{U} \qquad \text{und} \qquad (f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in \mathcal{V}$$

Weiter gilt

$$\mathrm{d}g(f(x)) = (\mathrm{d}f(x))^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

7.8 Implizite Funktionen

7.8.1 Rang und reguläre Punkte

Der Rang von $\mathrm{d}f(p_0)$ ist

$$\mathrm{Rang}(\mathrm{d}f(p_0)) = \dim\left(\mathrm{d}f(p_0))(\mathbb{R}^n)\right) = \dim\left(\{\mathrm{d}f(p_0) \cdot \xi; \xi \in \mathbb{R}^n\}\right)$$

Offensichtlich gilt $\mathrm{Rang}(\mathrm{d}f(p_0)) \leq \min\{n,l\}$, wobei Gleichheit in folgenden Fällen gilt

- $n \leq l$, falls $\mathrm{d}f(p_0)$ injektiv
- $n \geq l$, falls $\mathrm{d}f(p_0)$ surjektiv
- $n = l$, falls $\mathrm{d}f(p_0)$ bijektiv

Der Punkt p_0 heisst nun regulärer Punkt von f, falls $\mathrm{Rang}(\mathrm{d}f(p_0)) = \min\{n,l\}$ maximal ist.

7.8.2 Satz über implizite Funktionen

Sei $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^l)$, $l < n$ und sei $p_0 \in \Omega$ regulär mit $f(p_0) = 0$. Führe Koordinaten $(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \cong \mathbb{R}^n$ ein, wobei $k = n - l > 0$, so dass

$$\partial_y f(p_0) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j}(p_0)\right)_{1 \leq i,j \leq l} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$$

invertierbar ist. Sei $p_0 = (x_0, y_0)$. Dann gibt es Umgebungen $\mathcal{U}$ von x_0 in $\mathbb{R}^k$ sowie $\mathcal{W}$ von p_0 in $\mathbb{R}^n$ und eine Funktion $h \in C^1(\mathcal{U};\mathbb{R}^l)$ mit $h(x_0) = y_0$ und

$$f(x,h(x)) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{U}$$

Bemerkung Die Funktion h lässt sich im allgemeinen nicht explizit angeben. Es gilt jedoch

$$\mathrm{d}h(x) = -\left(\partial_y f(x,h(x))\right)^{-1} \partial_x f(x,h(x))$$

7.9 Extremwerte mit Nebenbedingungen

7.9.1 Lagrange-Funktion und -Multiplikator

Sei $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^l)$ mit $l < n$, wobei $g = 0$ die l Nebenbedingungen ausdrückt. Dann heisst der Co-Vektor $\lambda = \lambda(p_0) \in \mathbb{R}^l$ in $0 = \partial_x f(p_0) + \lambda \cdot \partial_x g(p_0)$ Lagrange-Multiplikator. Die Funktion $L = L_{p_0} = f + \lambda \cdot g : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst weiter Lagrange-Funktion.

7.9.2 Lagrange-Multiplikator-Regel

Sei p_0 regulär für g, erfülle die l Nebenbedingungen (also $g(p_0) = 0$) und extremal für f. Dann gilt $\mathrm{d}L_{p_0}(p_0) = 0$. Der Punkt p_0 heisst dann kritischer Punkt.

7.9.3 Vorgehen Maximum/Minimum

i. Bestimme alle regulären Punkte von g indem der Rang von $\mathrm{d}g$ betrachtet wird. Alle nicht-regulären Punkte sind Kandidaten für Maximum/Minimum. Für alle regulären Punkte:
   (a) Bestimme die implizite Funktion g für die Nebenbed. $\quad \to l$ Gleichungen.
   (b) Berechne die Lagrange-Funktion $L = f + \lambda \cdot g$, leite diese ab und bestimme die Nullstellen des Differentials. $\quad \to n$ Gleichungen.
   (c) Alle (regulären) Punkte, welche diese $n+l$ Gleichungen erfüllen, sind Extrema und deshalb Kandidaten für Maximum/Minimum.

8 Integration im $\mathbb{R}^n$

8.1 Grundlagen

8.1.1 Gebiete der Klasse C^k

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist von der Klasse C^k falls es zu jedem $p_0 \in \partial\Omega$ Koordinaten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existieren, ein Intervall $[a,b]$ sowie eine Funktion $\chi \in C^k([a,b])$ mit

$$\Omega \cap Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq y, c \leq y \leq \chi(x)\right\}$$

8.1.2 Satz von Green

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse C^1_{pw}, und seien $g, h \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\partial\Omega} (g\mathrm{d}x + h\mathrm{d}y)$$

wobei $\partial\Omega$ so orientiert ist, dass Ω stets zu Linken liegt.
Setze als Rotation eines Vektorfeldes v

$$v = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{rot}(v) = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$$

Damit lässt sich der Satz von Green auch schreiben als

$$\int\limits_\Omega \mathrm{rot}(v)\ \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\partial\Omega} v \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

8.1.3 Einfach zusammenhängend in $\mathbb{R}^2$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt von der Klasse C^1_{pw} und wegzusammenhängend (d.h. jeder Punkt kann auf einem Weg γ erreicht werden). Dann heisst Ω einfach zusammenhängend (1-zusammenhängend) falls $\partial\Omega$ zusammenhängend ist, also nur eine Komponente hat.

8.2 Substitutionsregel

8.2.1 Diffeomorphismus

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$. Die Abbildung Φ heisst Diffeomorphismus von $\mathcal{U}$ auf $\mathcal{V} = \Phi(\mathcal{U})$ falls Φ injektiv und falls

$$\det(\mathrm{d}\Phi(x)) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{U}$$

Mit dem Umkehrsatz folgt weiter

$$\Psi = \Phi^{-1} \in C^1(\mathcal{V}; \mathbb{R}^n)$$

8.2.2 Transformationssatz

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$ Diffeomorphismus von $\mathcal{U}$ auf $\mathcal{V} = \Phi(\mathcal{U})$ und sei $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{U}$ beschränkt und Jordan-messbar. Dann ist $\Phi(\Omega) \in \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und es gilt

$$\mu(\Phi(\Omega)) = \int\limits_\Omega |\det(\mathrm{d}\Phi(x))|\ \mathrm{d}\mu(x)$$

8.2.3 Substitutionsregel

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$ Diffeomorphismus von $\mathcal{U}$ auf $\mathcal{V} = \Phi(\mathcal{U})$, $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{U}$ beschränkt und Jordan-messbar und sei $f : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt und R-integrabel. Dann ist $(f \circ \Phi) \cdot |\det(\mathrm{d}\Phi)| : \Omega \to \mathbb{R}$ ebenfalls R-integrabel und es gilt

$$\int\limits_{\Phi(\Omega)} f\ \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega (f \circ \Phi)|\det(\mathrm{d}\Phi)|\ \mathrm{d}\mu$$

8.3 Oberflächenmass und Flussintegral

8.3.1 Lokale Immersion

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\Phi \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^3)$ injektiv. Falls der Rang von $\mathrm{d}\Phi(w)$ für jedes $w \in \mathcal{U}$ den (maximalen) Wert 2 hat, so heisst Φ eine lokale Immersion.

8.3.2 Skalares Flächenelement und Oberflächenintegral

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\Phi \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^3)$ lokale Immersion. Für $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{U}$ beschränkt und Jordan-messbar sei $\mathcal{S} = \Phi(\Omega)$ das von Φ parametrisierte Flächenstück. Es gilt

$$\mu_2(\mathcal{S}) := \int\limits_S \mathrm{d}o := \int\limits_\Omega \underbrace{|\Phi_u \times \Phi_v|(w)\ \mathrm{d}\mu(w)}_{\mathrm{d}o,\ \text{skalares Flächenelement bzgl. } \Phi}$$

Sei $f : \overline{\mathcal{S}} \to \mathbb{R}$ stetig, so wird das Oberflächenintegral definiert als

$$\int\limits_{\mathcal{S}} f\ \mathrm{d}o := \int\limits_\Omega (f \circ \Phi) \cdot |\Phi_u \times \Phi_v|\ \mathrm{d}\mu(u, v)$$

8.3.3 Fluss eines Vektorfeldes

Der von Φ induzierte Normalenvektor ist definiert als

$$n(p) = \frac{(\Phi_u \times \Phi_v)(w)}{|\Phi_u \times \Phi_v|(w)}$$

an $\mathcal{S} = \Phi(\Omega)$ im Punkt $p = \Phi(w)$. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$ offen. Dann ist der Fluss eines Vektorfeldes $\mathcal{K} \in C^1(\mathcal{W}; \mathbb{R}^3)$ durch die mit n orientierte Fläche $\mathcal{S}$ gegeben als

$$\int\limits_{\mathcal{S}} \mathcal{K} \cdot n\ \mathrm{d}o = \int\limits_\Omega (\mathcal{K} \circ \Phi)\ \Phi_u \times \Phi_v\ \mathrm{d}\mu(u, v)$$

8.4 Der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

8.4.1 Rotation im $\mathbb{R}^3$

Für $\mathcal{K} \in C^1(\mathcal{W}; \mathbb{R}^3)$ in einer Umgebung $\mathcal{W}$ von $\mathcal{S}$ ist die Rotation definiert als

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} C_y - B_z \\ A_z - C_x \\ B_x - A_y \end{pmatrix} = \nabla \times \mathcal{K}$$

8.4.2 Satz von Stokes

Sei $\mathcal{K} \in C^1(\mathcal{W}; \mathbb{R}^3)$ in einer Umgebung $\mathcal{W}$ von $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\operatorname{rot}\mathcal{K}} \cdot n \, \mathrm{d}o = \int\limits_{\partial\mathcal{S}} \mathcal{K} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

8.4.3 Einfach zusammenhängend in $\mathbb{R}^3$

Sei $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$ offen und zusammenhängend. $\mathcal{W}$ heisst 1-zusammenhängend, falls jede einfach geschlossene Kurve $\Gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \mathcal{W})$ Rand eines orientierten Flächenstückes $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ ist, wobei $\mathcal{S}$ die Vereinigung endlich vieler immersierter, fast disjunkter (berühren sich nur am Rand) Flächenstücke $\mathcal{S}_j = \Phi_j(\Omega_j)$ für $1 \leq j \leq J$ mit kompatiblen Orientierungen und Γ die einzig äussere Randkomponente.

8.4.4 Satz von Poincaré im $\mathbb{R}^3$

Sei $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und 1-zusammenhängend. Weiter sei $\mathcal{K} \in C^1(\mathcal{W}; \mathbb{R}^3)$. Dann sind äquivalent

- $\mathcal{K}$ ist konservativ
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}\mathcal{K}} = 0$

8.5 Der Satz von Gauss

8.5.1 Divergenz

Die Divergenz (Quellenstärke) von $\mathcal{K}$ ist

$$\operatorname{div}\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{K}^i}{\partial x^i}$$

8.5.2 Satz von Gauss

Sei $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{W}$ beschränkt und von der Klasse C^1_{pw}. Dann gilt

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathcal{K} \, \mathrm{d}\mu^{(3)} = \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{K} \cdot n \, \mathrm{d}o$$

wo $n(p)$ die "äussere Normale" ist.

A Appendix

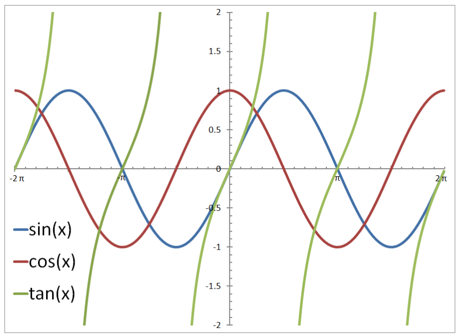
A.1 Trigonometrie

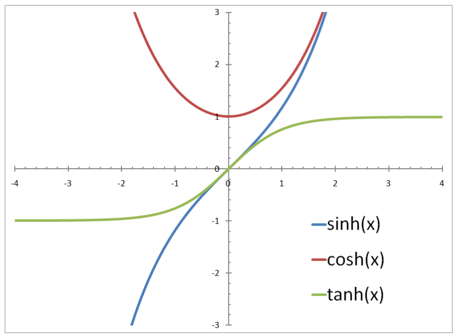
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Tangens	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \tfrac{e^x+e^{-x}}{2} = -i\sin(ix) \\
\sinh(x) &= \tfrac{e^x-e^{-x}}{2} = cos(ix) \\
\tanh(x) &= \tfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = -i\tan(ix) \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\
e^{\pm x} &= \cosh(x) \pm \sinh(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\
\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\
\tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha) \\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha) \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \tfrac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)} \\
\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\
\tan(2\alpha) &= \tfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \\
\sin(3\alpha) &= 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha) \\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) \\
\tan(3\alpha) &= \tfrac{3\tan(\alpha)-\tan^3(\alpha)}{1-3\tan^2(\alpha)} \\
\sin(\arccos(\alpha)) &= \sqrt{1-\alpha^2} = \cos(\arcsin(\alpha))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2(\tfrac{\alpha}{2}) &= \tfrac{1-\cos(\alpha)}{2} \\
\cos^2(\tfrac{\alpha}{2}) &= \tfrac{1+\cos(\alpha)}{2} \\
\tan^2(\tfrac{\alpha}{2}) &= \tfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \\
\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) &= 2\sin(\tfrac{\alpha\pm\beta}{2})\cos(\tfrac{\alpha\mp\beta}{2}) \\
\cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2})\cos(\tfrac{\alpha-\beta}{2}) \\
\cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2\sin(\tfrac{\alpha+\beta}{2})\sin(\tfrac{\alpha-\beta}{2}) \\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)) \\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)) \\
e^{i\varphi^2} = 1 &= \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \\
\sin(\varphi) &= \tfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2} \\
\cos(\varphi) &= \tfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2i} \\
e^{i\varphi} &= \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)
\end{aligned}$$





A.2 Verschiedenes

A.2.1 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

A.2.2 Mitternachtsformel

$$ax + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A.2.3 Ausklammern

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$
$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1)$$

A.2.4 Masse von speziellen Gebieten

Zylinder	$V = \pi r^2 h$	Torus	$V = 2\pi^2 R r^2$
Kegel	$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$		$S = 4\pi^2 R r$
Kegelstumpf	$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$	Kugel	$V = \frac{4\pi}{3} r^3$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} G h$		$S = 4\pi r^2$
Ellipsoid	$V = \frac{4\pi}{3} abc$		

A.3 Integral- und Differentialrechnung

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a\cdot(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ax}{c}-\frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{x}{2}f(x)+\frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{x}{2}f(x)-\frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin(\frac{x}{\lvert a\rvert})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$
$\frac{-1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert\tan(\frac{x}{2})\right\rvert$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right\rvert$
$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$
$\tan^2(x)$	$\tan(x)-x$
$\cot^2(x)$	$-\cot(x)-x$
$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
$\arccos(x)$	$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\arctan(x)$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\sin^n(x)$	$s_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}s_{n-2}$
	$s_0=x \quad s_1=-\cos(x)$
$\cos^n(x)$	$c_n=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}c_n$
	$c_0=x \quad c_1=\sin(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$ und umgekehrt
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\ln\lvert x\rvert$	$x\cdot(\ln\lvert x\rvert-1)$
$\frac{1}{x}(\ln x)^n$	$\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} \quad n\neq-1$
$\frac{1}{x}\ln x^n$	$\frac{1}{2n}(\ln x^n)^2 \quad n\neq0$
$\frac{1}{x\ln x}$	$\ln\lvert\ln x\rvert \quad x>0, x\neq1$
a^{bx}	$\frac{1}{b\ln a}a^{bx}$
$x\cdot e^{cx}$	$\frac{cx-1}{c^2}\cdot e^{cx}$
$x^n\ln x$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right) \quad n\neq-1$
$e^{cx}\sin(ax+b)$	$\frac{e^{cx}(c\sin(ax+b)-a\cos(ax+b))}{a^2+c^2}$
$e^{cx}\cos(ax+b)$	$\frac{e^{cx}(c\cos(ax+b)+a\sin(ax+b))}{a^2+c^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$
$\tan(x)$	$\tan^2(x)+1=\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-(1+\cot^2(x))=\frac{-1}{\sin^2(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\ln a}=\log_a(e)\frac{1}{x}$
a^{cx}	$a^{cx}\cdot c\ln a$
x^x	$x^x\cdot(1+\ln x) \quad x>0$
$(x^x)^x$	$(x^x)^x(x+2x\ln(x)) \quad x>0$
$x^{(x^x)}$	$x^{(x^x)}(x^{x-1}+\ln x\cdot x^x(1+\ln x))$

A.4 Ansätze für partikuläre Lösung

Hinweis: nur brauchbar für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Bezeichnungen:

$P(x)$	charakt. Polynom der DGL
$S_k(x)$	polynomielle Störfunktion, Grad k
A, B	unbekannte Konstanten
$R_k(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$	mit unbekannten Koeffizienten

$g(x)$	*Ansatz*
ce^{mx}	Ae^{mx} , falls $P(m)\neq0$
	Ax^qe^{mx}, falls m q-fache NST von P
$S_k(x)$	$R_k(x)$, falls $P(0)\neq0$
	$x^qR_k(x)$, falls 0 q-fache NST von P
$P_k(x)e^{mx}$	$R_k(x)e^{mx}$, falls $P(m)\neq0$
	$x^qR_k(x)e^{mx}$, falls m q-fache NST von P
$\sin wx, \cos wx$	$A\cos wx+B\sin wx$, falls $P(\pm iw)\neq0$
	$x^q(A\cos wx+B\sin wx)$, falls $\pm iw$ q-fache NST von P
$\sinh wx, \cosh wx$	$A\cosh wx+B\sinh wx$, falls $P(w)\neq0$
	$x^q(A\cosh wx+B\sinh wx)$, falls w q-fache NST von P

B Verschiedene Tipps

B.1 Bijektivität einer Funktion zeigen

i. Zeige Surjektivität mittels Zwischenwertsatz

ii. Zeige Injektivität mittels Monotonie: Ist eine Funktion f streng monoton wachsend (fallend), so ist f auf diesem Intervall injektiv.
Um die Monotonie zu zeigen, kann die Ableitung f' betrachtet werden. Ist diese strikt grösser (kleiner) 0, so ist die Funktion streng monoton wachsend (fallend).

B.2 Grenzwert einer Folge bestimmen

- Zeige Monotonie und Beschränktheit (beides z.B. mit vollständiger Induktion)
- Bernulli de l'Hopital
- Umformungen:

$u(x)v(x) = \frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$	falls $0 \cdot \infty$	$u(x) + v(x) = \frac{[u(x)+v(x)][u(x)-v(x)]}{u(x)-v(x)}$	
$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$	falls 0^0, ∞^∞, 1^∞	$u(x) - v(x) = \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x)v(x)}}$	falls $\infty - \infty$
$u(x) = \frac{u^2(x)}{u(x)}$		$\sqrt{u(x)} + v(x) = \frac{u(x)-v^2(x)}{\sqrt{u(x)}-v(x)}$	

B.3 Konvergenz einer Reihe untersuchen

- Notwendig: Nullfolge
- Quotienten- oder Wurzelkriterium
- Abschätzen anhand einer Reihe, deren Konvergenz man kennt (Minoranten- bzw. Majorantenkriterium)

B.4 Standardsubstitutionen

Integral	Substitution	Differential	Bemerkungen
$\int f(g(x), g'(x))dx$	$t = g(x)$	$dx = \frac{dt}{g'(x)}$	Lsg: $\frac{1}{2}[f(x)^2] + C$
$\int f((ax+b))dx$	$t = ax + b$	$dx = \frac{dt}{a}$	Lsg: $\frac{1}{a}\int f(u)du$
$\int f(x, \sqrt{ax+b})dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2tdt}{a}$	$t \geq 0$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$	$x = \alpha t + \beta$	$dx = \alpha dt$	wähle α und β so, dass gilt $ax^2 + bx + c = \gamma \cdot (\pm t^2 \pm 1)$
$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$	$x = a \cdot \sin t$	$dx = a \cdot \cos t dt$	$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$	$x = a \cdot \sinh t$	$dx = a \cdot \cosh t dt$	$t \in \mathbb{R}$
$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$	$x = a \cdot \cosh t$	$dx = a \cdot \sinh t dt$	$t \geq 0$
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x)dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{dt}{t}$	$t > 0$, und dabei gilt: $\sinh x = \frac{t^2-1}{2t}$ $\cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x)dx$	$\tan\frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	$-\frac{\Pi}{2} < t < \frac{\Pi}{2}$, und dabei gilt: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$