Grundlagen

1 Online/offline algorithms

Ein Online-Algorithmus kennt nicht den gesamten Input von Beginn an, sondern die Angaben werden zur Laufzeit ständig ergänzt. Im Vergleich zu einem Offline-Algorithmus, welchem die gesamte Eingabe bereits zu Beginn zu Verfügung steht, ist dieser gezwungen, Entscheidungen zu treffen, die sich später möglicherweise als nicht optimal herausstellen.

2 Analysen

2.1 Kompetitive Analyse

Die Kompetitive Analyse wird für Online-Algorithmen eingesetzt. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um das Verhältnis von Kosten einer Lösung des Onlinealgorithmus zu denen einer optimalen Lösung (die man mit vorheriger Kenntnis der vollständigen Daten errechnen könnte) im schlechtesten Fall (über alle möglichen Sequenzen von schrittweise eintreffenden Informationen). Der Online-Algorithmus wird also einem optimalen Offlineverfahren gegenübergestellt. Dabei versucht man eine Schranke für die competive ratio zu finden. Dazu müssen natürlich alle möglichen Inputs betrachtet werden; das Untersuchen der schweren Probleme alleine genügt nicht, da ein Problem möglicherweise nicht für beide Verfahren (online und offline) gleich schwer sind.

2.2 Big-Oh Notation

Um das Wachstum einer Funktion abzuschätzen, kann die Big-Oh Notation verwendet werden:

$$O(f) = \{g \mid \exists c_1, c_2\ \forall n : g(n) \leq c_1 f(n) + c_2\}$$

oder dazu äquivalent

$$O(g(n)) = \{f: N \rightarrow R^+ : \exists\, c \in R^+, n_0 : \forall\, n \geq n_0 : f(n) \leq c\, g(n)\}$$

2.3 Reduktion

Um eine untere Schranke für die Komplexität eines Problems zu finden, kann Reduktion verwendet werden. Dazu wird ein Problem unbekannter Komplexität in ein Problem bekannter Komplexität f überführt. Der Übergang muss dabei in „echt weniger Zeit" möglich sein als $\Omega(f)$, geschrieben also $g_1, g_2 = o(f)$, wenn g_1 und g_2 die Komplexitäten sind, um das Problem zu transformieren, bzw. die Lösung wieder zurückzuüberführen. Ist dies möglich, so hat man eine untere Schranke für g gefunden.

2.4 Amortisierte Analyse

Will man nicht die Kosten einer einzelnen Operation abschätzen, sondern etwas über eine Folge von Operationen sagen, so eignet sich eine amortisierte Analyse. Dabei wählt man eine Potentialfunktion ϕ_i welche dem Zustand des zu untersuchenden Algorithmus nach der Operation i einen Wert zuweist.

Die i-te Operation habe tatsächliche Kosten von t_i. Dann sind die amortisierten Kosten dieser Operation gegeben als $a_i = t_i + \phi_i - \phi_{i-1}$. Also gilt für eine Folge von m Operationen:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} t_i + \phi_i - \phi_{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{m} t_i\right) + \phi_m - \phi_0$$

Wenn also ϕ stets positiv ist, und zu Beginn mit 0 initialisiert wird, können damit die tätsächlichen Kosten durch die amortisierten abgeschätzt werden.

3 Grundlegende Algorithmen

3.1 Median

Der Median, also das $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$-te Element einer Folge von *n* Elementen in linearer zu bestimmen scheint zuerst schwierig für eine nichtsortierte Folge. Dennoch existieren Algorithmen, mit linearer Laufzeit. Aufgrund derer Komplexität werden in der Praxis jedoch oft randomisierte Algorithmen vorgezogen.

3.1.1 Randomisierter Algorithmus

Quicksort liefert eine gute Vorlage für das finden des Medians: Es muss jedoch nicht wie bei Quicksort die gesamte Folge sortiert werden, sondern nach dem Aufteilen bezüglich des Pivots muss nur noch in einem Teil der Folge weitergemacht werden. Im Idealfall fallen so jeweils 50% der Elemente, welche noch in Frage kommen, weg. In diesem Fall wäre die Laufzeit $n+n/2+n/4+n/8+\ldots = 2n = O(n)$. Dieses Verfahren garantiert jedoch keine lineare Laufzeit im worst-case, erwartet wird jedoch trotzdem ein lineares Verhalten.

3.1.2 Median of median

Dieser Algorithmus kann in linearer Zeit das i-te Element (der sortierten Folge) einer beliebigen Sequenz ausgeben.

Zuerst wird die Sequenz in Teile der Grösse 5 aufgeteilt, und für jede Gruppe der Median bestimmt. Da dies nur 5 Elemente sind, ist dies in konstanter Zeit machbar. Dann wird für die $n/5$ Mediane wiederum der Median bestimmt (rekursiv), und dieses Element wird dann als Pivotelement gewählt. Das weitere Vorgehen ist dann wie bei der randomisierten Variante.